# *AC310 Analisi complessa* *(7 cfu)*

## *AA 2018-2019 - II Semestre (L. Chierchia)*

# *Programma*

Il campo complesso.
Topologia.
Serie geometrica, serie esponenziale.
Formula di Eulero.
Le funzioni trigonometriche e iperboliche su **C**.
Teorema di addizione per l'esponenziale e conseguenze.
Radici in **C**. Radici ennesime di un numero complesso.
Teorema fondamentale dell'algebra.
Definizione di derivata complessa e di funzione analitica (olomorfa).
Equazioni di Cauchy-Riemann.
f=u+iv è analitica su un aperto A se e solo se u e v sono differenziabili e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann.
Se f è analitica, $|f'|^2$=J=Jacobiano della mappa (x,y) -> (u,v).
Funzioni armoniche e funzioni armoniche coniugate.
Costruzione di armoniche coniugate tramite integrazione di forme differenziali. Esempi.
Regole di derivazioni di funzioni complesse.
Esempi di funzioni intere (analitiche su **C**): polinomi, exp z, sen z, cos z, sh z, ch z (calcolo delle loro derivate).
Logaritmi complessi e le inverse dell'esponenziale su strisce $\{a - \pi < \mathrm{Im}\, z < a + \pi\}$.
Il ramo principale del logaritmo.
Definizione di funzione conforme.
**Teorema** *Una funzione f conforme e iniettiva su una regione ha inversa $F=f^{-1}$ conforme e $F'(w)=1/f'(z)$ con $z=F(w)$.* (Dimostrazione basata sul teorema della funzione inversa).
**Teorema** *Sia f una funzione analitica su una regione A. Assumiamo che valga (su tutto A) una delle seguenti ipotesi: $f'=0$; Re f= cost; Im f= cost; $|f|$= cost. Allora, f è costante su A.* (Dimostrazione basata sulla connessione di A per "poligonali coordinate").
Definizione di log z ($z\neq 0$) come insieme.
Definizione di angoli. Calcolo di $i^i$.
Il toro unidimensionale $\mathbf{T}:=\mathbf{R}/(2\pi\,\mathbf{Z})$ è un gruppo abeliano additivo dotato di metrica.
Omemorfismo di gruppo tra **T** e $S^1$.
Angoli tra elementi non nulli di **C**.
Argomento di un un numero complesso non nullo.
Proprietà fondamentali di angoli e argomento.
Curve, curve regolari, angoli tra curve.
Gli operatori $\partial$ e $\partial$.
$\partial f = 0$ è equivalente alle equazioni di Cauchy-Riemann.
Mappe che conservano gli angoli.
**Proposizione** *f è analitica con $f'\neq 0$ se e solo se f conserva gli angoli tra curve.*

Mappe di Möbius (o trasformazioni lineari fratte): casi speciali; composizioni; struttura di gruppo; compattificazione di **C** e sfera di Riemann; proiezione stereografica; birapporto; le mappe di Möbius trasformano cerchi o rette in cerchi o rette.
Serie di potenze complesse.
Formula di Hadamard per il raggio di convergenza.
Una serie di potenze definisce una funzione analitica all'interno del disco di convergenza.
Integrazione complessa.
L'integrale su una curva chiusa qualunque di una funzione f continua è zero se e solo se f=F '.
Teorema di Cauchy su convessi per funzioni analitiche con singolarità eliminabili.
Indice e formula di Cauchy.
La derivata di una funzione analitica è analitica.
Formula di Cauchy per le derivate di funzioni analitiche.
Stime di Cauchy.
Teorema di Liouville.
Dimostrazione del Teorema fondamentale dell'algebra.
Serie di Taylor di funzioni analitiche e stima geometrica sul raggio di convergenza.
Formula di Taylor per funzioni analitiche (con resto analitico e sua rappresentazione di Cauchy).
Zeri e poli di funzioni analitiche.
Singolarità essenziali; teorema di Weierstrass.
Derivata logaritmica e numero di zeri di funzioni analitiche.
Proprietà locali di mappe analitiche.
Principio del massimo.
Teorema di Rouché (nel caso di disco e curva chiusa).
Lemma sul calcolo dell'indice.
Dimostrazione del principio del massimo con la formula di Cauchy.
Lemma di Schwarz.
Caratterizzazione delle mappe conformi del cerchio su sé stesso.
Cicli e catene.
Regioni semplicemente connesse.
Omologia dei cicli.
Il teorema generale di Cauchy.
Generalizzazione (omotopia) di: formula di Cauchy, teorema generale dei residui, principio dell'argomento, teorema di Rouché.
Esempi di calcolo di integrali impropri.
Convergenza di successioni di funzioni analitiche (Teorema di Weierstrass).
Teorema di Hurwitz.
Serie di Laurent.
Espansioni in fratti parziali; teorema di Mittag-Leffler.
Serie di Fourier di funzioni analitiche
Prodotti infiniti; caratterizzazione della convergenza in termini di serie.
Prodotti canonici e teorema di Weierstrass sulla rappresentazione di funzioni intere tramite prodotti canonici.
Funzioni intere con genere finito.
Rappresentazione canonica di sen $\pi$ z.